

3.2. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI LINIOWE.

Rozwiązaniem równania (pierwiastkiem równania) z jedną niewiadomą nazywamy liczbę, która spełnia dane równanie, tzn. jeśli w miejsce niewiadomej podstawimy tę liczbę, to otrzymamy równość prawdziwą.

Przykład 3.2.1. Sprawdź, która z liczb -1 , $\frac{4}{3}$ jest rozwiązaniem równania

$$(x-3)^2 - \frac{6-x}{2} = x(x-1).$$

Rozwiązanie	Komentarz
$(x-3)^2 - \frac{6-x}{2} = x(x-1)$ $(-1-3)^2 - \frac{6-(-1)}{2} = -1(-1-1)$ $(-4)^2 - \frac{6+1}{2} = -1 \cdot (-2)$ $16 - 3\frac{1}{2} = 2$ $12\frac{1}{2} = 2$ <p>Odp. -1 nie jest rozwiązaniem równania.</p>	<p>Sprawdzamy, czy -1 jest rozwiązaniem równania. Za x podstawiamy -1.</p> <p>Po uproszczeniu otrzymujemy równość fałszywą. Zatem -1 nie jest rozwiązaniem równania.</p>
$(x-3)^2 - \frac{6-x}{2} = x(x-1)$ $\left(\frac{4}{3}-3\right)^2 - \frac{6-\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}-1\right)$ $\left(\frac{4}{3}-\frac{9}{3}\right)^2 - \frac{\frac{18}{3}-\frac{4}{3}}{2} = \frac{16}{9}-\frac{4}{3}$ $\left(-\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{14}{3} = \frac{16}{9}-\frac{12}{9}$ $\frac{25}{9}-\frac{14}{6} = \frac{4}{9}$ $\frac{25}{9}-\frac{7}{3} = \frac{4}{9}$ $\frac{25}{9}-\frac{21}{9} = \frac{4}{9}$ $\frac{4}{9} = \frac{4}{9}$ <p>Odp. $\frac{4}{3}$ jest rozwiązaniem równania.</p>	<p>Sprawdzamy, czy $\frac{4}{3}$ jest rozwiązaniem równania. Za x podstawiamy $\frac{4}{3}$.</p> <p>Po uproszczeniu otrzymujemy równość prawdziwą. Zatem $\frac{4}{3}$ jest rozwiązaniem równania.</p>

Równanie liniowe z jedną niewiadomą

Równaniem liniowym z jedną niewiadomą x nazywamy równanie postaci $ax + b = 0$

Warunki	Postać równania	Rozwiązania równania	Nazwa równania
$a \neq 0$	$ax + b = 0$	jedno rozwiązanie: $x = \frac{-b}{a}$	równanie oznaczone
$a = 0 \wedge b \neq 0$	$b = 0$	nie ma rozwiązania	równanie sprzeczne
$a = 0 \wedge b = 0$	$0 = 0$	nieskończenie wiele rozwiązań : $x \in R$	równanie tożsamościowe

Przykład 3.2.2. Rozwiąż równanie:

a) $6x - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}x + 3$

Rozwiązanie	Komentarz
<p>a) $6x - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}x + 3$</p> $6x - 2\sqrt{3}x = 3 + \sqrt{3}$ $x(6 - 2\sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3} \quad / : (6 - 2\sqrt{3})$ $x = \frac{3 + \sqrt{3}}{6 - 2\sqrt{3}} \quad / \cdot (6 + 2\sqrt{3})$ $x = \frac{(3 + \sqrt{3})(6 + 2\sqrt{3})}{(6 - 2\sqrt{3})(6 + 2\sqrt{3})}$ $x = \frac{18 + 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{9}}{6^2 - (2\sqrt{3})^2}$ $x = \frac{18 + 12\sqrt{3} + 6}{36 - 4\sqrt{9}}$ $x = \frac{24 + 12\sqrt{3}}{36 - 12}$ $x = \frac{12(2 + \sqrt{3})}{24}$ $x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ <p>Odp. Równanie ma jedno rozwiązanie :</p> $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$	<p>Przenosimy wyrażenia z niewiadomą na lewą stronę , a stałe na prawą stronę. Przy przenoszeniu wyrażen na drugą stronę równania pamiętamy o zmianie znaku. Wyznaczamy x dzieląc obie strony równania przez współczynnik stojący przy niewiadomej. Doprowadzamy wynik do najprostszej postaci.</p> <p>Usuujemy niewymierność z mianownika , rozszerzając ułamek przez mianownik ze zmienionym znakiem.</p> <p>W mianowniku stosujemy wzór skróconego mnożenia: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$</p>

$$b) \frac{x+2}{2} + \frac{2-x}{3} = \frac{x-1}{6}$$

Rozwiązanie	Komentarz
$b) \frac{x+2}{2} + \frac{2-x}{3} = \frac{x-1}{6} / \cdot 6$ $6 \cdot \frac{x+2}{2} + 6 \cdot \frac{2-x}{3} = 6 \cdot \frac{x-1}{6}$ $3(x+2) + 2(2-x) = x-1$ $3x+6+4-2x = x-1$ $3x-2x-x = -1-6-4$ $0 = -11$ <p>Odp. Równanie nie ma rozwiązania.</p>	<p>Obie strony równania mnożymy przez wspólny mianownik 6.</p> <p>Porządkujemy równanie , wykonując mnożenie oraz przenosząc wyrażenia z niewiadomą na lewa stronę , a stałe na prawą stronę.</p> <p>Po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy sprzeczność.</p>

$$c) (2x+5)^2 - (2x-1)^2 = 24(x+1)$$

Rozwiązanie	Komentarz
$c) (2x+5)^2 - (2x-1)^2 = 24(x+1)$ $(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 - ((2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2) = 24x + 24$ $4x^2 + 20x + 25 - (4x^2 - 4x + 1) = 24x + 24$ $4x^2 + 20x + 25 - 4x^2 + 4x - 1 = 24x + 24$ $4x^2 - 4x^2 + 20x + 4x - 24x = 24 + 1 - 25$ $0 = 0$ <p>Odp. Równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań: $x \in R$</p>	<p>Usuujemy nawiasy , stosując wzory skróconego mnożenia:</p> $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ <p>Porządkujemy równanie , przenosząc wyrażenia z niewiadomą na lewa stronę , a stałe na prawą stronę.</p> <p>Po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy równość prawdziwą..</p>

Jeżeli nierówność mnożymy przez liczbę ujemną , to następuje zmiana znaku nierówności.

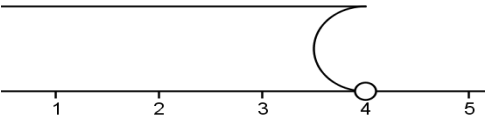
Jeżeli nierówność mnożymy przez liczbę dodatnią , to znak nierówności pozostaje bez zmian.

Przykład 3.2.3. Rozwiąż nierówność: $(4x+1)(4x-1) - 4x(4x-3) \geq (x-1)(x+13) - x^2$

Rozwiązanie	Komentarz
$(4x+1)(4x-1) - 4x(4x-3) \geq (x-1)(x+13) - x^2$ $(4x)^2 - 1^2 - 16x^2 + 12x \geq x^2 + 13x - x - 13 - x^2$ $16x^2 - 1 - 16x^2 + 12x \geq x^2 + 13x - x - 13 - x^2$ $16x^2 - 16x^2 - x^2 + x^2 + 12x - 13x + x \geq -13 + 1$ $0 \geq -13$ <p>Odp. $x \in R$</p>	<p>Usuujemy nawiasy , wykonując mnożenie oraz stosując wzór skróconego mnożenia:</p> $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ <p>Porządkujemy nierówność , przenosząc wyrażenia z niewiadomą na lewa stronę , a stałe na prawą stronę</p> <p>Po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy nierówność prawdziwą..</p>

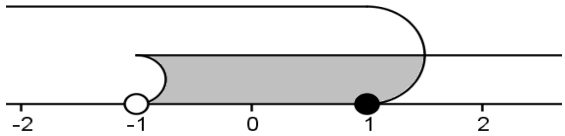
Przykład 3.2.4. Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające nierówność

$$\frac{-2x+3}{2} + \frac{x+2}{4} > -1$$

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{-2x+3}{2} + \frac{x+2}{4} > -1$ $\frac{-2x+3}{2} + \frac{x+2}{4} > -1/4$ $4 \cdot \frac{-2x+3}{2} + 4 \cdot \frac{x+2}{4} > -4$ $2(-2x+3) + x+2 > -4$ $-4x+6+x+2 > -4$ $-4x+x > -4-6-2$ $-3x > -12 / :(-3)$ $x < 4$  $x \in (-\infty, 4)$ <p>Odp. Liczbami naturalnymi spełniającymi nierówność są 0,1,2,3.</p>	<p>Obie strony nierówności mnożymy przez wspólny mianownik 4 i pozbywamy się ułamków.</p> <p>Porządkujemy nierówność, wykonując mnożenie oraz przenosząc wyrażenia z niewiadomą na lewą stronę, a stałe na prawą stronę. Wykonujemy redukcję wyrazów podobnych.</p> <p>Nierówność mnożymy przez liczbę ujemną, zatem zmieniamy znak nierówności.</p> <p>Otrzymane rozwiązanie przedstawiamy na osi liczbowej i zapisujemy jako przedział.</p> <p>W odpowiedzi wypisujemy liczby naturalne należące do rozwiązania nierówności.</p>

Przykład 3.2.5. Rozwiąż nierówność podwójną: $x + 2 < 3x + 4 \leq 2x + 5$

Rozwiązanie	Komentarz
$x + 2 < 3x + 4 \leq 2x + 5$ $\begin{cases} x + 2 < 3x + 4 \\ 3x + 4 \leq 2x + 5 \end{cases}$ $\begin{array}{ll} x + 2 < 3x + 4 & \text{i} \quad 3x + 4 \leq 2x + 5 \\ x - 3x < 4 - 2 & 3x - 2x \leq 5 - 4 \\ -2x < 2 / :(-2) & x \leq 1 \\ x > -1 & x \leq 1 \end{array}$	<p>Nierówność podwójną zapisujemy jako układ nierówności.</p> <p>Rozwiązujemy nierówności z układu.</p> <p>Otrzymane rozwiązania przedstawiamy na osi liczbowej i</p>

 <p style="text-align: center;">$x \in (-1, 1)$</p> <p>Odp. Rozwiązaniem nierówności $x + 2 < 3x + 4 \leq 2x + 5$ jest $x \in (-1, 1)$</p>	wyznaczamy ich część wspólną
---	------------------------------

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 3.2.1. (2pkt.) Rozwiąż równanie: $x - \frac{x-1}{2} = \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie równania bez kresek ułamkowych.	1
2	Podanie rozwiązania równania.	1

Ćwiczenie 3.2.2. (2pkt.) Rozwiąż nierówność: $(x+4)^2 - 5(2x-3) \leq (x-2)^2$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie nierówności bez nawiasów.	1
2	Podanie rozwiązanie nierówności, w postaci przedziału.	1

Ćwiczenie 3.2.3. (3pkt.) Rozwiąż układ nierówności
$$\begin{cases} (x+1)^2 + 7 > (x-4)^2 \\ (1+x)^2 + 3x^2 \leq (2x-1)^2 + 7 \end{cases}$$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie rozwiązania pierwszej nierówności.	1
2	Podanie rozwiązania drugiej nierówności.	1
3	Podanie rozwiązanie układu nierówności w postaci przedziału.	1

Ćwiczenie 3.2.4. (5pkt.) Wyznacz zbiory $A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B$, jeśli

$$A = \{x \in R : x - 2 \leq 2(x + 3)\} \quad B = \{x \in R : (x - 1)^2 + 6 > x^2 - 1\}$$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Zapisanie zbioru A w postaci przedziału.	1
2	Zapisanie zbioru B w postaci przedziału.	1
3	Zapisanie zbioru $A \cup B$ w postaci przedziału.	1
4	Zapisanie zbioru $A \cap B$ w postaci przedziału.	1
5	Zapisanie zbioru $A \setminus B$ w postaci przedziału.	1